

最小次数 3 以上の 2-連結グラフの有限集合を生成する 禁止部分グラフ条件

東京理科大学 大学院理学研究科 応用数学専攻

小谷 崇文 (Takafumi KOTANI) *

概要

グラフの族 \mathcal{H} に対して, グラフ G が \mathcal{H} に属するグラフを誘導部分グラフとして含まないとき, G は \mathcal{H} -free であるという. $\mathcal{G}_2^{(3)}(\mathcal{H})$ は 最小次数 3 以上の 2-連結 \mathcal{H} -free グラフ全体の集合を表すものとする. 本研究では, $|\mathcal{H}| = 3$ かつ $\mathcal{G}_2^{(3)}(\mathcal{H})$ が有限となる族 \mathcal{H} の特徴づけを行う. 特に, $\{K_3, K_{2,2}\} \subseteq \mathcal{H}$ の場合を除いて, そのような族 \mathcal{H} を決定した.

1 はじめに

本稿では, 有限無向グラフを扱い, 定義していない用語や記号に関しては, [4] を参照する.

2つのグラフ G と H に対して, G が H を誘導部分グラフとして含むとき, $H \prec G$ と書くことにする. グラフ G と H に対して, $H \not\prec G$ とき, G は **H -free** であるという. また, グラフの族 \mathcal{H} に対して, G が任意の $H \in \mathcal{H}$ に対して H -free であるとき, G は **\mathcal{H} -free** という. また, \mathcal{H} のグラフは G の**禁止部分グラフ**と呼ばれる. 整数 $k, l \geq 1$ とグラフの族 \mathcal{H} に対し, 以下のグラフの集合を定義する.

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_k(\mathcal{H}) &:= \{G \mid G \text{ は } k\text{-連結 } \mathcal{H}\text{-free グラフ}\} \\ \mathcal{G}^{(k)}(\mathcal{H}) &:= \{G \mid G \text{ は最小次数 } k \text{ 以上の } \mathcal{H}\text{-free グラフ}\} \\ \mathcal{G}_k^{(l)}(\mathcal{H}) &:= \{G \mid G \text{ は最小次数 } l \text{ 以上の } k\text{-連結 } \mathcal{H}\text{-free グラフ}\}\end{aligned}$$

l 頂点の完全グラフを K_l , 部集合の大きさがそれぞれ m, n である完全 2 部グラフを $K_{m,n}$ で表す. 特に, $K_{1,n}$ をスターと呼ぶ. また, k 頂点の道を P_k で表す.

n を $n \geq 2$ の整数, $P = x_1x_2\dots x_n$ を位数 n の道, y_1, y_2, z_1, z_2 を x_1, \dots, x_n とは異なる 4 頂点とする. Y_n, Y_n^*, Z_n, Z_n^* を次のように定めるグラフとする:

$$\begin{aligned}V(Y_n) &= V(Z_n) = V(P) \cup \{y_1, y_2\}, \quad V(Y_n^*) = V(Z_n^*) = V(P) \cup \{y_1, y_2, z_1, z_2\}, \\ E(Y_n) &= E(P) \cup \{x_1y_1, x_1y_2\}, \quad E(Y_n^*) = E(P) \cup \{x_1y_1, x_1y_2, x_nz_1, x_nz_2\}, \\ E(Z_n) &= E(Y_n) \cup \{y_1y_2\}, \quad \text{and } E(Z_n^*) = E(Y_n^*) \cup \{y_1y_2, z_1z_2\}. \quad (\text{図 1})\end{aligned}$$

Y' を図 1 のグラフとする.

* E-mail : kotani.graph0518@gmail.com

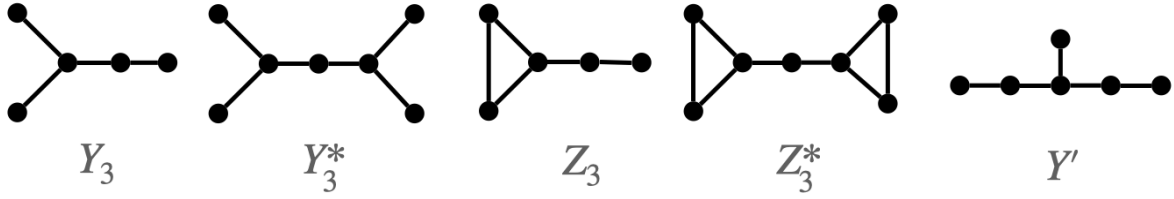


図1 グラフ $Y_3, Y_3^*, Z_3, Z_3^*, Y'$

2 本研究の目的・背景

2.1 禁止部分グラフの研究の意義

禁止部分グラフに関する研究は、構造グラフ理論における中心的テーマとして広く認識されており、その汎用性と多様な研究分野への深い関連性から重要な位置を占めている。禁止部分グラフの研究の重要性は、以下の3つの観点から述べることができる。

第一に、グラフの大域的な性質が、禁止部分グラフという局所的な構造条件によって特徴付けられる点である（例えば [3, 13] を参照）。ハミルトン性やパーフェクト性といった性質は、グラフ全体の構造に依存する本質的に大域的な性質である。一般に、与えられたグラフが特定の性質を満たすかどうかを検証することは困難である。しかし、禁止部分グラフによる特徴付けが確立されれば、局所的な構造を調べるだけで、そのグラフが大域的性質を持つことを保証できる。

第二に、特定のグラフを禁止することで、一般のグラフに比べてグラフ不変量の評価を改良でき、その挙動に影響を与える局所構造を特定できる点である（例えば [21] を参照）。一般のグラフに対して、染色数などの不変量に最良な上界・下界を与えることは困難である。しかし、不変量に悪影響を与える「望ましくない局所構造」を排除することで、より良い評価が可能となり、それらの不変量を制御する本質的な構造が明らかになる。

第三に、計算複雑性の観点から重要な知見を与える点である。一般のグラフでは NP 完全となる問題でも、特定の禁止部分グラフによって定義されるグラフ族に制限することで、多項式時間で可解となる場合がある（例えば [16] を参照）。どの禁止構造が計算的な困難性を緩和するかを特定することは、計算可能なケースと困難なケースの境界を理解するために不可欠である。

したがって、禁止部分グラフの研究は、理論的な理解とアルゴリズム解析の両面において基礎的な重要性を持つ。

2.2 有限集合を生成する禁止部分グラフ

本研究では、

$$\mathcal{G}_k^{(l)}(\mathcal{H}) \text{ が有限.} \quad (1.1)$$

の条件を満たす連結グラフの族 \mathcal{H} について考察する。特に、 $(k, l, |\mathcal{H}|) = (2, 3, 3)$ かつ $\{K_3, K_{2,2}\} \not\subseteq \mathcal{H}$ に対して、(1.1) を満たす族 \mathcal{H} を特徴づける。 \mathcal{H} に位数 2 以下の完全グラフが属するとき、明らか

に $\mathcal{G}_2^{(3)}(\mathcal{H})$ が有限であるので、以降 \mathcal{H} に属するグラフが位数 3 以上であるものとして議論する。

このような族 \mathcal{H} に関する研究は、

$$\mathcal{G}_k(\mathcal{H}) \text{ が有限} \quad (1.2)$$

の条件を満たす連結グラフの族 \mathcal{H} に関する研究から始まる。族 \mathcal{H} が (1.2) を満たすとき、グラフにおける任意の性質 P に対して、

$$\text{任意の } k\text{-連結 } \mathcal{H}\text{-free グラフは、有限の例外を除いて、性質 } P \text{ を満たす。} \quad (1.3)$$

しかし、その命題から P について知見が得られない。したがって、(1.2) を満たす族 \mathcal{H} を決定することは重要である。このような背景から、Fujisawa, Plummer, Saito [14] は、(1.2) を満たす族 \mathcal{H} に関する研究を行い、 $1 \leq k \leq 6$ かつ $|\mathcal{H}| \leq 2$ の場合と、 $(k, |\mathcal{H}|) = (2, 3)$ の場合に対する (1.2) を満たす族 \mathcal{H} を完全に特徴づけた。以降、 $|\mathcal{H}| = 3$ に限定して議論を進める ($|\mathcal{H}| = 4$ の場合には [15] を参照)。 $k = 3$ の場合については、多くの研究者がこの問題に取り組んでいる。特に、Egawa, Fujisawa, Furuya, Plummer, Saito [7], Egawa, Furuya [8], Egawa, Zhao [12] によって、スターを含まず、かつ $\{K_3, K_{2,2}\} \not\subseteq \mathcal{H}$ と (1.2) を満たす族 \mathcal{H} が決定された。 $\{K_3, K_{2,2}\} \subseteq \mathcal{H}$ の場合については、完全な特徴づけは依然として未解決問題であるが、その特徴づけを主張する [11] の予想に対し、いくつかの部分的な結果 [5, 6, 11] を通じて段階的なアプローチがなされている。 ($k = 4$ の場合については、Buelban, Garciano, Marcelo, Mori, Nakamura [1] により部分的な結果が得られている。)。一方で、(1.3) のような命題において、連結度の条件は最小次数の条件によく置き換えられるという事実から、 k -連結グラフの代わりに、最小次数 l 以上のグラフについて考えることは自然である。このような背景から、Egawa, Furuya [9, 10] によって、

$$\mathcal{G}^{(l)}(\mathcal{H}) \text{ が有限} \quad (1.4)$$

の条件を満たす連結グラフの族 \mathcal{H} の研究が行われた。その結果、 $\{K_3, K_{2,2}\} \subseteq \mathcal{H}$ となる場合を除いて、 $(l, |\mathcal{H}|) = (3, 3)$ に対する (1.4) を満たす族 \mathcal{H} を決定した ($(l, |\mathcal{H}|) = (4, 3)$ の場合については、Kotani [17] により部分的な結果が得られている)。

ここで、 $\mathcal{G}_3(\mathcal{H}) = \mathcal{G}_3^{(3)}(\mathcal{H})$, $\mathcal{G}^{(3)}(\mathcal{H}) = \mathcal{G}_1^{(3)}(\mathcal{H})$, $\mathcal{G}_3^{(3)}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{G}_2^{(3)}(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{G}_1^{(3)}(\mathcal{H})$ であることに注意する。前述の通り、 $\mathcal{G}_3^{(3)}(\mathcal{H})$ および $\mathcal{G}_1^{(3)}(\mathcal{H})$ については広く研究されているが、 $\mathcal{G}_2^{(3)}(\mathcal{H})$ に着目した研究はこれまでなかった。さらに、近年の禁止部分グラフの研究において、「最小次数 l 以上の k -連結グラフ」を対象に研究が行われるようになり (例えば、[2, 20] を参照)、先行研究と同様に、そのようなグラフの族が有限となる禁止部分グラフ条件を特定する必要が高まっている。このような理由から、本研究では、 $(k, l, |\mathcal{H}|) = (2, 3, 3)$ の場合に対する (1.1) を満たす族 \mathcal{H} について考察を行う。

3 主結果

本研究の成果を述べる前に、Fujisawa, Plummer, Saito [14] によって示された基本的な補題を紹介する。

補題 3.1 ([14]). グラフの族 \mathcal{H} に対して、 $\mathcal{G}_3(\mathcal{H})$ が有限のとき、ある整数 l, m, n ($l \geq 3, 1 \leq m \leq 3, n \geq \max\{m, 2\}$) に対して、 $\{K_l, K_{m,n}\} \subseteq \mathcal{H}$ 。

$\mathcal{G}_3(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{G}_2^{(3)}(\mathcal{H})$ であるから、補題 3.1 より、 $|\mathcal{H}| = 3$ かつ $\mathcal{G}_2^{(3)}(\mathcal{H})$ が有限となるならば、ある整数 l, m, n ($l \geq 3, 1 \leq m \leq 3, n \geq \max\{m, 2\}$) と 3 頂点以上の連結グラフ T が存在して、 $\mathcal{H} = \{K_l, K_{m,n}, T\}$ となる。そこで、 m の値ごとに場合分けを行い、 $\mathcal{G}_2^{(3)}(\{K_l, K_{m,n}, T\})$ が有限となるようなグラフ T を調べる。

その結果、 $\{K_3, K_{2,2}\} \subseteq \mathcal{H}$ の場合を除いて、族 $\mathcal{H} = \{K_l, K_{m,n}, T\}$ を決定した。結果は以下のとおりである。

定理 3.2. $l \geq 3, n \geq 2$ とし、 T を位数 3 以上の連結グラフとする。このとき、 $\mathcal{G}_2^{(3)}(\{K_l, K_{1,n}, T\})$ が有限であるための必要十分条件は、次のいずれかが成立することである：

- (i) $n = 2$ or T is a path;
- (ii) $l = 3$, and $T \prec Y_t^*$ for some integer $t \geq 3$ with $t \not\equiv 1 \pmod{4}$;
- (iii) $n = 3$ and $T \prec Z_t$ for some integer $t \geq 2$;
- (iv) $(l, n) = (3, 3)$.

定理 3.3. $l \geq 3, n \geq 2, (l, n) \neq (3, 2)$ とし、 T をスターではない位数 3 以上の連結グラフとする。 $\mathcal{G}_2^{(3)}(\{K_l, K_{2,n}, T\})$ が有限であるための必要十分条件は、次のいずれかが成立することである：

- (i) $l = 3, n = 3$, and $T \prec Y_3^*, T \prec Y_5$ or $T \prec Y'$;
- (ii) $l = 3, n \geq 4$ and $T \prec Y_3^*$;
- (iii) $l = 4, n = 2$ and $T \prec P_6$;
- (iv) $l = 4, n \geq 3$ and $T \prec P_5$.

定理 3.4. $l \geq 3, n \geq 3$ とし、 T をスターではない位数 3 以上の連結グラフとする。このとき、 $\mathcal{G}_2^{(3)}(\{K_l, K_{3,n}, T\})$ が有限であるための必要十分条件は、 $l = 3$ であり、かつ次のいずれかが成立することである：

- (i) $n = 3$ and $T \prec Y_4$;
- (ii) $n \geq 4$, and $T \simeq Y_3$ or $T \prec P_5$.

4 最後に

本研究では、 $|\mathcal{H}| = 3$ かつ $\mathcal{G}_2^{(3)}(\mathcal{H})$ が有限となる族 \mathcal{H} について考察した。特に、 $\{K_3, K_{2,2}\} \subseteq \mathcal{H}$ の場合を除き、同条件を満たす族 \mathcal{H} を決定した。なお、本稿の内容は [18, 19] に基づくものである。したがって、本稿で割愛した証明や、より詳しい議論については同文献を参照されたい。

事実、 $\mathcal{G}_3(\mathcal{H})$ および $\mathcal{G}^{(3)}(\mathcal{H})$ の有限性の研究においても、 $|\mathcal{H}| = 3$ かつ $\{K_3, K_{2,2}\} \subseteq \mathcal{H}$ の場合は未解決問題である。この場合が未解決である背景には、構造的な複雑さが挙げられる。一般に、禁止部分グラフが小さい場合、局所構造に対して強い制約が課されるため、出現し得る構造が限定され、その形状が特定されやすくなる。一方、 $\mathcal{G}_3(\mathcal{H})$ および $\mathcal{G}^{(3)}(\mathcal{H})$ の有限性の研究から、 $\mathcal{H} = \{K_3, K_{2,2}, T\}$ としたときのグラフ T は、直径の大きいキャタピラーではない木、すなわち複雑かつ大きなグラフとなる。禁止部分グラフが複雑かつ大きい場合、局所構造への制約が緩んで自由度が増し、多様な構造が許容されるため、その分類は困難となる。

しかしながら、先行研究によって部分的ではあるが成果は得られているものの、完全な解決には、既存の手法の精緻化や、より詳細な構造解析の積み重ねが依然として不可欠である。今後は、本来の研究対象である $\mathcal{G}_3(\mathcal{H})$ の有限性の問題における $\mathcal{H} = \{K_3, K_{2,2}, T\}$ の場合に焦点を絞り、完全な解決を目指して研究を進めていく。

参考文献

- [1] O. Buelban, A. Garciano, R. Marcelo, A. Mori and S. Nakamura, Stars in forbidden triples generating a finite set of 4-connected graphs, *Lecture Notes in Computer Science*, Springer, in press.
- [2] R. Čada, K. Ozeki, L. Xiong and K. Yoshimoto, A pair of forbidden subgraphs and 2-connected supereulerian graphs, *Discrete Math.* **341** (2018), 1696–1707.
- [3] M. Chudnovsky, N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, The strong perfect graph theorem, *Ann. of Math.* **164** (2006), no. 1, 51–229.
- [4] R. Diestel, “Graph Theory”(5th edition), *Graduate Texts in Mathematics.* **173**, Springer(2017).
- [5] Y. Egawa, Forbidden caterpillars for 3-connected graphs with girth at least five, *Australasian Journal of Combinatorics*, **90(3)** (2024), 231–261.
- [6] Y. Egawa, Forbidden trees with diameter six for 3-connected graphs, *Ars Combin.* **164** (2025), 3–17.
- [7] Y. Egawa, J. Fujisawa, M. Furuya, M.D. Plummer and A. Saito, Forbidden triples generating a finite set of 3-connected graphs, *Electron. J. Combin.* **22** (2015) #P3.13.
- [8] Y. Egawa and M. Furuya, Forbidden triples containing a complete graph and a complete bipartite graph of small order, *Graphs Combin.* **30** (2014), 1149–1162.
- [9] Y. Egawa and M. Furuya, Forbidden triples generating a finite set of graphs with minimum degree three, *Discrete Applied Mathematics.* **320** (2022), 282–295.
- [10] Y. Egawa and M. Furuya, Forbidden subgraphs generating a finite set of graphs with minimum degree three and large girth, preprint.
- [11] Y. Egawa, J. Nishiyama, H. Onozawa and T. Yamamura, Forbidden trees generating a finite set of 3-connected graphs with girth at least five, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, **86** (2023), 93–119.
- [12] Y. Egawa and Z. Zhao, Forbidden triples involving the complete bipartite graph with partite sets having cardinalities two and three, *Ars Combin.* **154** (2021), 159–195.
- [13] R.J. Faudree and R.J. Gould, Characterizing forbidden pairs for hamiltonian properties, *Discrete Math.* **173** (1997), 45–60.
- [14] J. Fujisawa, M.D. Plummer and A. Saito, Forbidden subgraphs generating a finite set, *Discrete Math.* **313** (2013), 1835–1842.
- [15] M. Furuya and Y. Okubo, Forbidden quadruplets generating a finite set of 2-connected graphs, *Discrete Math.* **338** (2015), 1277–1283.
- [16] P.A. Golovach, M. Johnson, D. Paulusma and J. Song, A Survey on the Computational Complexity of Coloring Graphs with Forbidden Subgraphs, *J. Graph Theory*, **84** (2017), no. 4, 331–363.

- [17] T. Kotani, Stars in forbidden triples generating a finite set of graphs with minimum degree four, *Electron. J. Graph Theory Appl.* **13** (2025), 1–17.
- [18] T. Kotani and Y. Egawa, Forbidden triples for 2-connected graphs with minimum degree three which contain K_4 and $K_{2,2}$, *Theory Appl. Graphs*, **12** (2025), Article 5.
- [19] T. Kotani and J. Nishiyama, Forbidden triples generating a finite set of 2-connected graphs with minimum degree three, *Tokyo J. Math.* to appear.
- [20] X. Liu, H. Lin and L. Xiong, Forbidden subgraphs and weak locally connected graphs, *Graphs Combin.* **34** (2018), 1671–1690.
- [21] B. Randerath and I. Schiermeyer, Vertex colouring and forbidden subgraphs – A survey, *Graphs Combin.* **20** (2004), 1–40.